RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN

- **Determina la distancia entre pares de puntos.**
- **Calcula las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son dos puntos dados.**
- **Halla la pendiente de una recta.**

COMUNICACIÓN MATEMÁTICA

- **Discrimina las diferentes ecuaciones de una recta.**
- **Determina el áreas de regiones poligonales, relacionado las coordenadas de sus vértices y aplicando fórmulas de distancia**
- **Discrimina pares de rectas paralelas, perpendiculares y coincidentes, analizando sus pendientes**

RESOLUCION DE PROBLEMAS

Resuelve problemas que implican el cálculo de las ecuaciones de la recta y el ángulo entre rectas

PARA SER TRABAJADO DESDE EL 18 -10-11 AL 08-11-11

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO.

La ***Geometría Analítica*** es el estudio o tratamiento analítico de la geometría, y por primera vez fue presentado por ***René Descartes*** en su libro llamado ***Géometrie*** que se publicó en el año de 1637. En esta obra, se establecía la relación explícita entre las curvas y las ecuaciones y podemos decir, que además de ***Descartes***, todos los matemáticos de los siglos **XVII** y **XVIII**, contribuyeron de una forma o de otra, al desarrollo de esta nueva teoría, que en la actualidad se estudia con el nombre de ***Geometría Analítica***, y que se fundamenta en el uso de ***Sistemas de Coordenadas Rectangulares*** o ***Cartesianas*** en honor de su fundador.

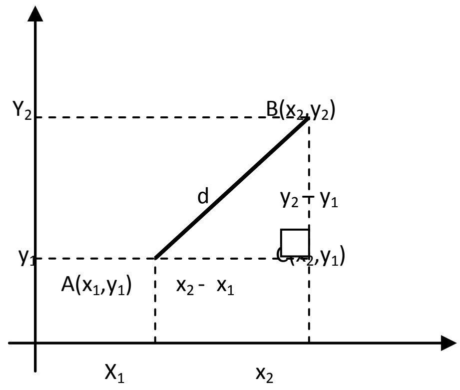
La ***Geometría Analítica*** es una parte de las matemáticas que, entre otras cosas, se ocupa de resolver algebraicamente los problemas de la geometría.

Distancia entre dos puntos.

Vamos a determinar una fórmula mediante la cual podamos calcular, en todos los casos, la ***distancia entre dos puntos*** de ***coordenadas*** conocidas. $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$

*Trazamos un segmento que tenga como extremos los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$

***De** A y B trazamos líneas punteadas perpendiculares al eje X y al eje Y formando un triángulo rectángulo recto en C.



* En el triángulo rectángulo ACB; AB= d es hipotenusa y AC , BC son catetos
Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

*Que es la ***fórmula*** para obtener la ***distancia entre dos puntos*** de coordenadas conocidas.
Esta igualdad, es posible expresarla en la siguiente forma, porque cualquiera que sea la diferencia, está elevada al cuadrado y el cuadrado de la diferencia de dos números no varía cuando se invierte el orden de la resta.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

*Ambas fórmulas, se leen: "La ***distancia entre dos puntos*** es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de la diferencia de las ***abscisas***, más el cuadrado de la diferencia de las ***ordenadas"***.
Ejemplos:
1) **Calcular** la ***distancia*** entre los ***puntos***: ***A (-3,2)*** y ***B(1,-1***).
SOLUCIÓN
Aplicando la fórmula **de** la ***distancia*** entre **dos** ***puntos***, tenemos:

$$d = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

2) Calcular la ***distancia*** entre los ***puntos***: ***P(6,5)*** y ***Q(-7,-3).***

Área del triángulo.

Sea un triángulo cuyos vértices son A(x_1,y_1) , B(x_2,y_2) ,C(x_3,y_3) y para calcular su área se usa la siguiente fórmula:

$$A = 1/2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & x_1 & y_1 & 1 & x_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 & x_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 1 & x_3 \end{array} = x_2y_3 + x_1y_2 + y_1x_3 - (y_1x_2 + x_3y_2 + y_3x_1)$$

Calcular el ***área del triángulo*** cuyos ***vértices*** son: ***P(-4,2)***, ***Q(5,4)*** y ***T(2,-3)***

$$A = ½ \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & -4 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{array} = -15 -16 +4 – (10+8+12) = - 57$$

$$A = ½(57) = \mathbf{28{,}5u^2}$$

Calcular el ***área del triángulo*** formado por los ***puntos P(-3,4)***, ***Q(5,3)*** y ***T(2,0)***

Condición para que tres puntos estén alineados

Para que tres puntos tales como: A(x_1 , y_1), B(x_2 , y_2) y C(x_3 , y_3) estén en línea recta es que no puedan formar un triángulo. Dicho de otra manera, se necesita que el área del triángulo que forman sea cero. Entonces para que tres puntos estén alineados debe satisfacerse la siguiente condición:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

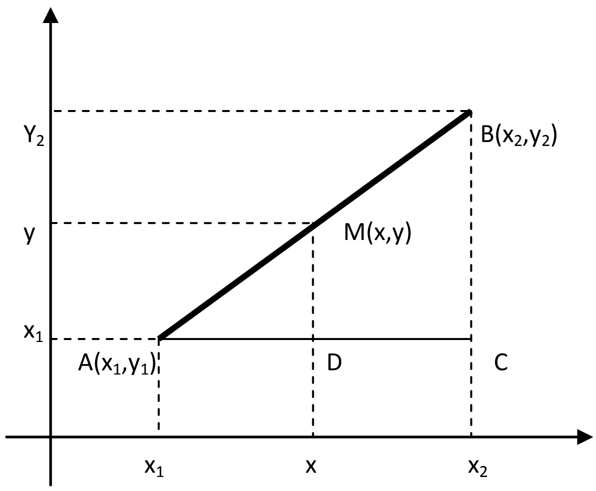
Demostrar que los **puntos**: **A(-1,- 4)**, **B(0,-1)** y **C(2,5)** están situados sobre una misma **recta**.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 -8 –(0 -2 -5) = -7 + 7 = 0$$

Demuestra que los puntos P(-1,4) , R(4,-3) ,Q(1,-5) están situados en una misma recta.

Punto medio de un segmento.

Nos proponemos a determinar las coordenadas del punto medio de un segmento, conociendo las coordenadas de sus puntos extremos.



Sea el segmento determinados por los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, además $M(x , y)$ su punto medio.
Las coordenadas del punto medio M, quedan determinadas así:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

1. Halla el punto medio M del segmento AB, formado por los puntos **A (-1,- 4)**, **B(0,-1)**

2. Halla el punto medio M del segmento BC, formado por los puntos **B(0,-1)** y **C(2,5)**

3. Halla el punto medio M del segmento QT, formado por los puntos ***Q(5,4)*** y ***T(2,-3)***

4. Halla el punto medio N del segmento AB, formado por los puntos ***A (-3,2)*** y ***B (1,-1)***.

I.E.P. MARÍA DE NAZARET *Piensa en grande, piensa en ti.*

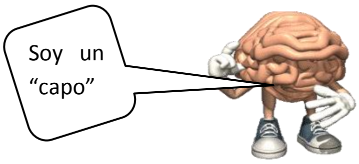
CUARTO GRADO – GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

APLICO LO QUE APRENDÍ

1) Calcular la distancia entre los dos puntos:

a) A (4 , 5) y B(1 , 3)

b) K(-2 ,-3) y L(-3 ,-5)



c) R(2 , 3) y S(½ , -1/2)

d) T(0,8 ; 3) y Z(0,2 ; -1)

e) M($\sqrt{3},5$) y N($-2\sqrt{3},4$)

f) C($-5\sqrt{3},2\sqrt{2}$) y D($-2\sqrt{3},5\sqrt{2}$)

g) H $(10\sqrt{3},6\sqrt{5})$ y J $(3\sqrt{5},-5\sqrt{3})$

2) Calcular el perímetro del polígono cuyos vértices son:

a) A(-4,6), B(6,2) , C(4,-4).

b) P(-4,0) , Q(0,6) , S(5,0)

c) N(-1,2) , P(-3,-1) ,Q(5,-1) , S(3,2)

d) R(0,-3) , K(2,0) , L(4,-3) , P(2,-6)

e) H(-1,6) , J(1,-1) , M(-6,-3)

3) Verifique que los triángulos que tienen por vértices los siguientes puntos son Isósceles

a) A(1,-2), B(4,2) , C(-3,-5)

b) S(-2,2) , T(6,6) , R(2,-2)

c) M(2,4) , N(5,1) , D(6,5)

d)A(3,8) , B(-11,3) , C(-8,-2)

4) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son:

a) P(-6,-6), Q(-2,8), T(4,2)

b) W(4 ,5) , T(-5,1) , G(7,-4)

c) M(0,9) , S(-4,-1) , B(3,2)

d) R(3,-2) , W(-2,3) , Q(0,4)

e) G(-2,8) , H(-6,1) , J(0,4)

5) Demostrar que los puntos son colineales : P(-3,-2) ,Q(5,2) , R(9,4)

6)Halle las coordenadas del centro y la longitud del radio de la circunferencia que pasa por lo puntos; (l0,2), (9,-3) ,(-8,-10)

.

7) La distancia entre A y B es 5 unidades. Si A (7,1) y B(3,y).Halle "y"

8) La distancia entre A y B es 10 unidades. Si A(x,3) y B(-3,6) .Halle "x"

9) Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2,-1) ,(7,-1) y (7,3) .Halla el cuarto vértice y su área.

10) Dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos (-1,1) y (3,1) .Halle las coordenadas del tercer vértice.

11) Los siguientes pares de puntos son los extremos de un segmento. Determine su punto medio de cada segmento:

a) A (1,2) y B(1,8)

b) A(-4,5) y B(3,6)

c) A(3,-7) y B(2,-4)

d) A(0,6) y B(12,0)

e) A(6,2) y B(1,4)

f) A(¾ ,5) y B(2, -7)

12) Se tiene las coordenadas de uno de los extremos de un segmento y su punto medio M. Halle las coordenadas del otro extremo.

a) S(6,4) y M(4,3)

b) T(4,1) y M(9,1)

c) F(8,-4) y M(3,-3)

d) H(-1,-1) y M(2,1)

e) K(-3,3) y M(0,0)

f) D(7,8) | y M(2,4)

13) Los vértices de un triángulo son los puntos A(-1,-2) ; B(-3,-6) y C(3,4).Halla la longitud de sus medianas

14) Determine el valor de "x" para que los puntos K(-2,5) , T(1,3) y Q(x,-1) sean colineales.

15)Se sabe que el área de un triángulo es $47u^2$.Si sus vértice son k(-3,y) , S(4,-3) , L(9,4) .Halle el valor de "y" .

16) M y N son los puntos medios de los segmentos AB y CD respectivamente .Si A(1,2) , B(5,8) , C(-2,-1) , D(3,4).Halle la distancia de de M a N. R. 4,3u

17)Verificar que los puntos siguientes son los vértices de un paralelogramo

a) (-1,-2) , (0,1) ,(-3,2) , (-4,-1)

b)(-1,-5) , (2,1) ,(1,5) , (-2 ,-1)

c) (2,4) , (6,2) , (8,6) , (4, 8)

PARA SER TRABAJADO DESDE EL 15 -11-11 AL 29-11-11

ECUACIONES DE LA RECTA: PUNTO- PENDIENTE, ORDENADA EN EL ORIGEN Y ECUACIÓN GENERAL.

Concepto de Línea Recta.

Éste concepto matemático parece no tener definición ya que es una sucesión de puntos y éstos carecen de magnitud, pero se considera como una trayectoria de puntos que no cambian de dirección, o bien, en términos del espacio, es la intersección de dos planos. Además tenemos los siguientes conceptos:

- **Segmento de recta:** Recta delimitada por dos puntos, ésta es una magnitud lineal finita.
- **Semirrecta:** Si se tiene una recta con un punto P contenido en ella y que la divide, cada una de las porciones en que queda dividida se le conoce como semirrecta.
- **Rayo:** Se le conoce como la semirrecta en un sentido, simbolizada como $\overrightarrow{AB}$ donde la flecha indica el sentido, el origen es A y el destino B, o bien por "r" con una flecha indicando el destino.
- Una recta es la representación gráfica de una función de primer grado.
- Toda función de la forma y = ax + b de IR en IR representa una línea recta.
- La **x** y la **y** son las variables de la ecuación, siendo **x** la <u>variable independiente</u> ya que puede tomar cualquier valor, mientras que **y** se llama <u>variable dependiente</u>, ya que su valor está determinado por el valor que tome x.
- Si un par de valores (x,y) pertenece a la recta, se dice que ese punto <u>satisface la ecuación</u>.
- Ejemplo: El punto (7,2) satisface la ecuación y = x - 5, ya que al reemplazar queda 2 = 7 - 5 lo que resulta verdadero.
- Cada punto (x,y) que pertenece a una recta se puede representar en un sistema de coordenadas IR x IR, siendo x el valor de la abscisa e y el valor de la ordenada.
  - (Abscisa , Ordenada)
- Ejemplo: El punto (-3,5) tiene por abscisa -3 y por ordenada 5.
- La ecuación de la recta puede ser representada en dos formas:

Forma General: ax + by + c = 0

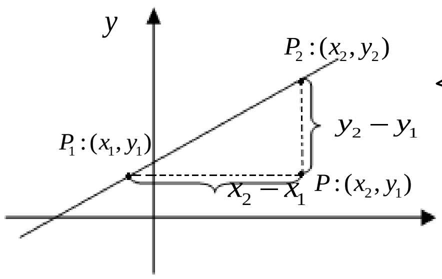
Forma Principal: y = mx + n

PENDIENTE

"Dime qué te entusiasma, y te diré quién eres"

PENDIENTE: Llamamos **pendiente** al grado de inclinación α que tiene una recta respecto del eje de las abscisas. La pendiente **m** de la recta determinada por : $\left(x_1, y_1\right)$ y B: $\left(x_2, y_2\right)$ está determinada por la expresión:

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



1. **Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos** B(-3,-6) y C(3,4).

2. **Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos** B(3, 16) y C(3,4).

3. **Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos** B (-3,-6) y C(-7,-4).

4. **Comprueba que los puntos son colineales** A(-4,-1), B (2,2) y C(8,-5). **(tienen igual pendiente)**

- Una recta que es paralela al eje x, tiene pendiente 0.
- En la ecuación general de la recta, la pendiente y el coeficiente de posición quedan determinados por:

$$m = \frac{-A}{B}$$

$$n = \frac{-C}{B}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta 4x - 6y + 3 = 0?

$$m = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$n = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

Sean $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ dos puntos de una recta. En base a estos dos puntos conocidos de una recta, es posible determinar su ecuación. Para ello tomemos un tercer punto R(x,y), también perteneciente a la recta.

Luego, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos es:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Que también se puede expresar como

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Ejemplo:

Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (1,2) y Q(3,4)

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{4-2}{3-1}$$

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{y-2}{x-1} = 1$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Ecuación de la recta dado punto-pendiente

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos está determinada por

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Pero

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Luego

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

Despejando, obtenemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ (ecuación punto pendiente)}$$

Ejemplo: Determina la ecuación general de la recta de pendiente -4 y que pasa por el punto (5,-3)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -4(x - 5)$$

$$y + 4 = -4x + 20$$

Luego la ecuación pedida es $4x + y - 16 = 0$.

Rectas Paralelas, coincidentes y perpendiculares

- Dos rectas son **paralelas** cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición distintos, o sea

L_1: $y = m_1x + n_1$

L_2: $y = m_2x + n_2$,

Entonces $L_1 // L_2$ sí y sólo si $m_1 = m_2$ y $n_1 \neq n_2$

Ejemplo: Las rectas $y = 4x + 5$; $y = 4x - 2$ son paralelas, pendientes iguales y $5 \neq -2$.

- Dos rectas son **coincidentes** cuando sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición iguales, se dice también que son coincidentes si sus coeficientes correspondientes son proporcionales osea:

L_1: $y = m_1x + n_1$

L_2: $y = m_2x + n_2$,

Entonces L_1 coincidente con L_2 sí y sólo si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$

Ejemplo: L_1 y L_2 son coincidentes:

L_1: $y = 3x + 2$

L_2: $2y = 6x + 4$,

- Dos rectas son **perpendiculares** cuando el producto de sus pendientes es -1, o sea

L_1: $y = m_1x + n_1$

L_2: $y = m_2x + n_2$,

Entonces $L_1 \perp L_2$ sí y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplo:

L_1: $y = -2x + 3$

L_2: $y = 0,5x - 4$

Entonces $L_1 \perp L_2$ ya que $-2 \cdot 0,5 = -1$

APLICO LO QUE APRENDÍ

1) Halla La ecuación de la recta que pasa por el punto N(1,5) y tiene pendiente 2.

Sol. 2X-Y + 3 = 0

2) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(-6,3)y que tiene ángulo inclinación de 45º

Sol. X – Y + 3 = 0

3) Halla la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y su intersección con el eje Y es -2 .

Sol. 3X + Y + 2 = 0

4) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos R(4,2) y T(-5,7).

Sol. 5X + 9Y -38 = 0

5) Una recta pasa por dos puntos C(-3 ,-1) y D(2 ,-6) ; Halla su ecuación en la forma simétrica.

Sol. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$

6) Una recta pasa por el punto V(7,8) y es paralela a la recta que pasa por los puntos M(-2,2) y N(3,-4). Halla su ecuación.

Sol. 6X + 5Y -82 = 0

7) Halla la ecuación de recta de pendiente -4 y que pasa por el punto de de las rectas 2X +Y -8 = 0 y 3X -2Y +9 = 0

Sol. 4X + Y – 10 = 0

8) Halla la ecuación de la recta que pasa por punto de intersección de las rectas ;
3X +Y = 4 y X – 3Y = -17 , tiene pendiente 2/3. Sol. 4X – 6Y + 35 = 0

9) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3,3) y por el punto de intersección de las rectas 5X = 2Y + 11 y 3X +2Y +3 = 0 Sol. 3X – Y – 6 = 0

10) Halla el área del triángulo formado por los ejes coordenados y la recta cuya ecuación es 5X +4Y +20 = 0 .

Sol. A = 10 u^2

11) Halla la ecuación de la recta determinando los coeficientes de la forma general que pasa por el punto T(-2,4) y tiene una pendiente igual a -3. Sol. $3X + Y + 2 = 0$

12) Halla la ecuación de la recta determinando los coeficientes de la forma general , si los puntos de intersección con los ejes son A(3,0) y B(0,-5),

Sol. $5X – 3Y – 15 = 0$

13) Halla la ecuación de la recta, determinando los coeficientes de la forma general que es perpendicular a la recta $3X-4Y +11 = 0$ y pasa por el punto (-1,-3)

Sol. $4X + 3Y + 10 = 0$

14) Halla el valor de K para que la recta $KX +(K- 1)Y -18 = 0$ sea paralela a la recta $4X+3Y+7 = 0$.

Sol. $K = 4$

15) La recta L pasa por las intersecciones de las rectas $2X-Y-2 = 0$ y $X + Y = 0$ Y por la intersección de las rectas $2X + Y + 1 = 0$ y $X - 4Y – 13 = 0$. Halla la ecuación de la recta.

Sol. $7X – 2Y – 13 = 0$

16) Halla la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas ,$12X + 6Y + 30 = 0$ y $20X –15Y –25 = 0$ y que es paralela a la recta $2X – Y = 6$

Sol. $2X – Y -1 = 0$

17) Halla la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas, $9X + 7Y +4 = 0$ y $11X – 13Y + 48 = 0$ y que es perpendicular a la recta $3X + 2Y + 3 = 0$ Sol. $2X – 3Y + 10 = 0$

18) Halla la pendiente y la ordenada **b** en el origen de la recta $2Y + 3X = 7$

Sol. $m = -3/2$, $b = 7/2$.

19) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos puntos extremos son :(7,4) y (1- ,-2).

Sol. $4X + 3Y - 15 = 0$

20) Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $8X -15Y +34 = 0$ que distan 3 unidades del punto.

Sol. $8x-15y+112 =0$,$8x-15y +10 = 0$

21) Halla el valor del parámetro K de forma que:

a) $3KX + 5Y +K -2 = 0$ pase por el punto (-1,4) sol. $K = 9$

b) $4X- KY -7 = 0$, tenga pendiente 3 sol. $K = 4/3$

c) $KX – Y= 3K -6$, tenga de abscisa en el origen 5. sol. $K = -3$

22) Halla la ecuación de recta de pendiente -3/4 que formen con los ejes coordenados un triángulo cuya área sea 24 u^2.

sol. $3X+4Y \pm 24 = 0$